ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860
УДК 519.6

МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ И УЛЬТРАФИЛЬТРЫ ШИРОКО ПОНИМАЕМЫХ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ

© А. Г. Ченцов

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Аннотация. Рассматриваются два типа семейств множеств широко понимаемого измеримого пространства: ультрафильтры (максимальные фильтры) и максимальные сцепленные системы. Получающиеся при этом множества ультрафильтров и максимальных сцепленных систем оснащаются каждое парой сравнимых топологий (по смыслу «волмэновской» и «стоуновской»), в результате чего реализуются два битопологических пространства, одно из которых оказывается подпространством другого; точнее, ультрафильтры являются максимальными сцепленными системами, а тогда совокупность последних образует объемлющее битопологическое пространство. С использованием топологических конструкций устанавливаются некоторые характеристические свойства ультрафильтров и (в меньшей степени) максимальных сцепленных систем (речь идет о необходимых и достаточных условиях максимальности фильтров и сцепленных систем).
Ключевые слова: битопологическое пространство; топология; ультрафильтр

Введение

Ультрафильтры (у/ф) используются в различных конструкциях общей топологии, теории меры, теории булевых алгебр. Широко известны компактификация Стоуна–Чеха, расширение Волмэна, пространства Стоуна. В первом случае используются у/ф семейства всех подмножеств (п/м) фиксированного множества (единицы), во втором – у/ф семейства замкнутых множеств топологического пространства (ТП), удовлетворяющего аксиоме T_1, а в третьем – у/ф алгебры множеств. Представляется полезным

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00410).

объединить упомянутые (и многие другие) случаи, полагая, что упомянутые семейства являются частными случаями некоторого общего варианта структуры одного достаточно универсального типа. В качестве данного варианта предлагается (для каждого фиксированного множества – «единицы») использовать π-систему [1, с. 14] с «нулем» (в виде пустого множества) и «единицей» в виде исходного объемлющего множества (сама же π-система есть семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Топологии, семейства замкнутых множеств в ТП, алгебры и полуалгебры множеств являются π-системами упомянутого типа. Среди π-систем особо выделяем решетки п/м объемлющего множества (решеточность понимается в смысле упорядоченности по включению).

Итак, будем рассматривать у/ф π-систем (см. [2]) и, в частности, у/ф решеток с «нулем» и «единицей», привлекая два естественных варианта оснащения топологией: имеется в виду аналог схемы Стоуна, применяемой обычно в случае измеримого пространства (ИП) с алгеброй множеств, и топологию волмэновского типа, которая, в частности, использовалась при построении суперрасширения ТП (см. [3–5] и др.; особо отметим систематическое изложение в [6, гл. VII, § 4]). С конструкцией суперрасширения, применяемой обычно в случае T_1-пространств, связано и свойство суперкомпактности [3–6], реализующееся для пространства максимальных сцепленных систем (МСС) замкнутых множеств (см. [6, гл. VII, § 4]); при этом замкнутые у/ф (точнее, у/ф семейства замкнутых множеств) являются МСС. Обратное, вообще говоря, неверно (см. [6, гл. VII, 4.18]). В этой ситуации логично рассматривать пространство МСС как объемлющее к пространству у/ф, что естественно порождает вопрос о битопологическом его оснащении (см. [7]), коль скоро такое оснащение реализуется, как уже отмечалось, для множества у/ф. Оказывается, данное оснащение удается реализовать посредством схем, подобных используемым в случае у/ф. Итак, множество МСС также оснащаем, имея в виду идейную аналогию, «стоуновской» и «волмэновской» топологиями (последнюю называют обычно топологией волмэновского типа). В ряде случаев упомянутые топологии совпадают, а соответствующее битопологическое пространство (БТП) вырождается, реализуя при этом суперкомпакт (суперкомпактное T_2-пространство). С другой стороны, известны случаи, когда «стоуновская» и «волмэновская» топологии на множестве МСС различаются (аналогичные случаи известны и для пространств у/ф). Упомянутые возможности обсуждаются в настоящей работе.

1. Общие положения

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, связки, $\emptyset$ – пустое множество; def заменяет фразу «по определению», $\stackrel{\triangle}{=}$ – равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Для произвольных объектов a и b через $\{a;b\}$ обозначаем множество, содержащее a, b и не содержащее никаких других элементов. Если x – объект, то $\{x\} \stackrel{\triangle}{=} \{x;x\}$ есть синглетон со свойством $x \in \{x\}$. Заметим, что для любых двух объектов (см. [8, гл. II, § 2]) u и v имеем $\{u;v\} = \{u\} \cup \{v\}$; для трех объектов p, q и r $\{p;q;r\} \stackrel{\triangle}{=} \{p;q\} \cup \{r\} = \{p\} \cup \{q\} \cup \{r\}$. Множества являются объектами; поэтому, следуя [8, гл. II, § 2, (1)], полагаем при всяком выборе объектов m и n, что $(m,n) \triangleq \{\{m\};\{m;n\}\}$, получая упорядоченную пару с первым элементом m и вторым элементом n. Для каждой упорядоченной пары z через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$.

Если X – множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X, $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$; $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Для произвольного непустого семейства $\mathfrak{X}$ полагаем, что

$$\begin{gathered}\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X:\ \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\},\ \{\cap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X\in\mathcal{X}} X:\ \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\},\\ \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X\in\mathcal{K}} X:\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\},\ \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X\in\mathcal{K}} X:\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\},\end{gathered} \tag{1.1}$$

получая четыре семейства п/м объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$; само $\mathfrak{X}$ является подсемейством каждого из вышеупомянутых четырех семейств (см. (1.1)). В дальнейшем семейства (1.1) используются как правило при условии $\emptyset \in \mathfrak{X}$. Если $\mathbb{M}$ – множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M:\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества B в виде $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A\cap B:\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ имеем след $\mathcal{A}$ на множество B. Каждому семейству $\mathcal{H}$ и множеству S сопоставляем семейство $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} | S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Если U и V – множества, то V^U есть def множество всех отображений из U в V; при $f \in V^U$ и $W \in \mathcal{P}(U)$ в виде $f^1(W) \triangleq \{f(x):\ x \in W\} \in \mathcal{P}(V)$ реализуется образ W при действии f. Как обычно, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;...\}$ и при $n \in \mathbb{N}$ $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$, а также $\overrightarrow{n,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} | n \leq k\}$. Если S – множество и $n \in \mathbb{N}$, то вместо $S^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение S^n, полагая при этом, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами. Если M – множество, то

$$\pi[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) | (\emptyset \in \mathcal{M})\&(M \in \mathcal{M})\&(A \cap B \in \mathcal{M}\ \forall A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M})\}$$

есть семейство всех π- систем п/м множества M с «нулем» и «единицей», а

$$\tilde{\pi}^0[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \pi[M] | \forall L \in \mathcal{M}\ \forall x \in M \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{M}:\ (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \emptyset)\}$$

есть семейство всех отделимых π-систем п/м упомянутого множества; в виде $(\mathrm{alg})[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \pi[M] | E \setminus L \in \mathcal{M}\ \forall L \in \mathcal{M}\}$ имеем семейство все алгебр п/м M.

Заметим, что при всяком выборе непустого множества X, π-системы $\mathcal{X} \in \pi[X]$ и множества $Y \in \mathcal{X}$ в виде $[\mathbf{C}_X[\mathcal{X}]](Y)$ имеем непустое семейство п/м X, а потому определено пересечение всех множеств данного семейства; эти множества называем квазикрестностями Y. С учетом этого корректно следующее определение: если X – непустое множество, то

$$\pi^\natural[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \pi[X] | \bigcap_{\Lambda\in[\mathbf{C}_X[\mathcal{X}]](Y)} \Lambda \in \mathbf{C}_X[\mathcal{X}]\ \forall Y \in \mathcal{X}\};$$

ясно, что $\pi^{\natural}[X] = \{\mathcal{X} \in \pi[X] | \forall Y \in \mathcal{X}\ \exists \Lambda_0 \in [\mathbf{C}_X[\mathcal{X}]](Y):\ \Lambda_0 \subset \Lambda\ \forall \Lambda \in [\mathbf{C}_X[\mathcal{X}]](Y)\}$. Введено семейство π-систем с наименьшими квазиокрестностями всех своих множеств.

Элементы топологии. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Через $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$ и полагаем $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C_I}[\tau]:\ \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$ (семейства из $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}]$ находятся в естественной двойственности). Полагаем, что

$$(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | (\ \mathbf{I} = \bigcup_{B \in \beta} B) \& (\forall B_1 \in \beta\ \forall B_2 \in \beta\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \beta: \\ (x \in B_3) \& (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\},$$

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | (\mathbf{I} \in \beta) \& (\bigcap_{B \in \beta} B = \emptyset) \& (\forall B_1 \in \beta\ \forall B_2 \in \beta\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus (B_1 \cup B_2) \\ \exists B_3 \in \beta:\ (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \& (x \notin B_3))\};$$

введены базы топологий (открытые базы) и базы семейств замкнутых множеств (замкнутые базы). Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то семейства из $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \tau = \{\cup\}(\beta)\}$ являются (открытыми) базами ТП $(\mathbf{I}, \tau)$, а семейства из $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq \{\beta \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \mathbf{C_I}[\tau] = \{\cap\}(\beta)\}$, соответственно, замкнутыми базами этого ТП. Семейства из $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\kappa \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | \{\cap\}_\sharp(\kappa) \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\}$ – суть открытые предбазы топологий на $\mathbf{I}$ (предбазы открытых множеств), а семейства из $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\}$ – замкнутые предбазы топологий на $\mathbf{I}$. Наконец, при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq \{\kappa \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \{\cap\}_\sharp(\kappa) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\}$$

имеем семейство всех открытых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; соответственно,

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}; \tau] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] | \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]\}$$

есть семейство всех замкнутых предбаз упомянутого ТП.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$, то $N^0_\tau(x) \triangleq \{\ G \in \tau | x \in G\}$ и $N_\tau(x) \triangleq \{\ H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) | \exists G \in N^0_\tau(x):\ G \subset H\}$. Тогда при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ в виде

$$\mathrm{cl}(A, \tau) \triangleq \{\ x \in \mathbf{I} |\ G \cap A \neq \emptyset\ \forall G \in N^0_\tau(x)\} = \{\ x \in \mathbf{I} |\ H \cap A \neq \emptyset\ \forall H \in N_\tau(x)\}$$

имеем замыкание A в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Если $\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то полагаем, что

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\chi] \triangleq \{\ \kappa \in \mathcal{P}'(\chi) | \mathbf{I} = \bigcup_{X \in \kappa} X\}$$

(семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из κ). Тогда в виде

$$((\mathbb{SC} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\ \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] | \exists \mathcal{S} \in (\mathrm{p} - BAS)_0[\mathbf{I}; \tau]\ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{S}] \\ \exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G}:\ \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\}$$

имеем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП. Если же $\tau \in ((\mathbb{SC}-\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I},\tau)$ есть T_2-пространство, то данное ТП $(\mathbf{I},\tau)$ называют суперкомпактом.

Сцепленные системы и фильтры. Согласно [3–6] семейство $\mathcal{I}$ называется сцепленным (сцепленной системой), если $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset\ \forall I_1 \in \mathcal{I}\ \forall I_2 \in \mathcal{I}$. Тогда

$$(\mathrm{link})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | I_1 \cap I_2 \neq \emptyset\ \forall I_1 \in \mathcal{I}\ \forall I_2 \in \mathcal{I}\}$$

есть семейство всех непустых сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. Логично рассматривать сцепленные подсемейства того или иного семейства множеств: если $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то $\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{I} \in (\mathrm{link})[\mathbf{I}] | \mathcal{I} \subset \mathfrak{X}\}$; тогда

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] | \forall \mathcal{Y} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}]\ \ (\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}) \Longrightarrow (\mathcal{X} = \mathcal{Y})\}$$

есть [9] семейство всех МСС, содержащихся в $\mathfrak{X}$.

Фиксируем до конца настоящего раздела π-систему $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$. Тогда

$$\langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] = \{\, \mathcal{I} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] | \forall J \in \mathcal{J}\ \ (J \cap I \neq \emptyset\ \forall I \in \mathcal{I}) \Longrightarrow (J \in \mathcal{I})\}.$$

Введем в рассмотрение фильтры широко понимаемого измеримого пространства (ИП) $(\mathbf{I},\mathcal{J})$:

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}) | (\, A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \& (\, \forall F \in \mathcal{F}\ \forall J \in \mathcal{J} \\ (F \subset J) \Longrightarrow (J \in \mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'(\langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}])\end{gathered}$$

есть множество всех вышеупомянутых фильтров; если $x \in \mathbf{I}$, то

$$(\mathcal{J} - \mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{\, J \in \mathcal{J} | x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})$$

есть тривиальный (фиксированный) фильтр, соответствующий точке x. В виде

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) |\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})\ \ (\, \mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\, \mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \{\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) | \\ \forall J \in \mathcal{J}\ \ (J \cap U \neq \emptyset\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (\, J \in \mathcal{U})\} = \{\, \mathcal{U} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] | \\ A \cap B \in \mathcal{U}\ \forall A \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}])\end{gathered} \tag{1.2}$$

имеем семейство всех у/ф ИП $(\mathbf{I},\mathcal{J})$; заметим, что у/ф данного ИП – суть максимальные центрированные подсемейства π-системы $\mathcal{J}$ и только они (см. [3, раздел 3]). Напомним, что с учетом леммы Цорна стандартным способом проверяется, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) :\ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}.$$

Аналогичное свойство имеет место для сцепленных систем:

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}]\ \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] :\ \mathcal{E} \subset \mathcal{S}.$$

Применение упомянутых двух свойств традиционно и специально в дальнейшем оговариваться не будет. В связи со свойствами тривиальных фильтров отметим, что (см. [10, (5.9)])

$$((\mathcal{J} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\ \forall x \in \mathbf{I}) \Longleftrightarrow (\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]). \tag{1.3}$$

В (1.3) имеем необходимые и достаточные условия максимальности тривиальных фильтров. В связи с представлениями у/ф напомним известное свойство

$$(\mathcal{J} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]) \Longrightarrow (\ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) = \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) | \forall A \in \mathcal{J}\ \ (A \in \mathcal{U}) \vee (\ \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{U})\}.$$

Подобное представление имеет место и для МСС.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Если* $\mathcal{J} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, *то справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] | \forall A \in \mathcal{J}\ \ (A \in \mathcal{E}) \vee (\mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{E})\}. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω – семейство в правой части (1.4). Покажем, что $\langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] = \Omega$. С использованием соотношений двойственности проверяется вложение $\langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] \subset \Omega$. Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Покажем, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}]$. Допустим противное: $\mathcal{V} \notin \langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}]$. Тогда для некоторого $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}]$ имеем свойства

$$(\ \mathcal{V} \subset \mathcal{W}) \& (\ \mathcal{V} \neq \mathcal{W}). \tag{1.5}$$

Тогда (см. (1.5)) $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset$. Пусть $W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$. Тогда, в частности, $W \in \mathcal{J}$. По определению Ω имеем, что $(W \in \mathcal{V}) \vee (\mathbf{I} \setminus W \in \mathcal{V})$. По выбору W получаем, что $\mathbf{I} \setminus W \in \mathcal{V}$. Тогда $\mathbf{I} \setminus W \in \mathcal{W}$. Последнее невозможно, т.к. $W \in \mathcal{W}$, и мы получаем противоречие со сцепленностью $\mathcal{W}$. Данное противоречие доказывает требуемое свойство максимальности $\mathcal{V}$. Итак, $\Omega \subset \langle \mathcal{J} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}]$. □

2. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем

Фиксируем в дальнейшем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Рассматриваем оснащения (топологиями) для непустого семейства $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Если $L \in \mathcal{L}$, то полагаем

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) | L \in \mathcal{U}\}.$$

При этом $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\ \Phi_{\mathcal{L}}(L) :\ \ L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$; в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ порождает топологию $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. В виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.1}$$

имеем (см. [11]) нульмерное [12, 6.2] T_2-пространство со свойством

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]; \tag{2.2}$$

если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то ТП (2.1) является нульмерным компактом, а (2.2) превращается в равенство.

З а м е ч а н и е 2.1. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда (см. (1.3)) имеем отображение

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E, \tag{2.3}$$

которое реализует погружение E в ТП(2.1) со свойствами [10, предложение 1,(3.5),(3.6)]. В частности, образ множества E при действии отображения (2.3) есть множество, всюду плотное в ТП (2.2). □

В общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ при $H \in \mathcal{P}(E)$ рассматриваем множество

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] \triangleq \{\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) | \exists U \in \mathcal{U} :\ U \subset H\}$$

(при $L \in \mathcal{L}$ и $H = E \setminus L$ имеем равенство $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)$). Как следствие

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda] :\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L});\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \quad (2.4)$$

Вместе с тем, как легко видеть (см. (2.4)), $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$ и определена (см. [2, (5.4)]) топология

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \quad (2.5)$$

В связи с (2.5) обратимся к представлениям [2] для у/ф, рассматриваемых как варианты МСС. В этой связи напомним, что семейство

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E] &= \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E] | \forall \mathcal{S} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]\ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\}\\ &= \{\ \mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E] | \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap \Sigma \neq \emptyset\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\}\end{aligned}$$

содержит $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и, следовательно, непусто;

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E] | A \cap B \in \mathcal{E}\ \forall A \in \mathcal{E}\ \forall B \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]).$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\begin{gathered}(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E] | L \in \mathcal{E}\}\ \forall L \in \mathcal{L})\\ \&(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E] | \exists \Sigma \in \mathcal{E} :\ \Sigma \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E))\end{gathered}$$

(см. [2, раздел 4]). В этих терминах определяем, следуя [2, (4.9)], два непустых семейства

$$(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L] :\ L \in \mathcal{L}\})\&(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda] :\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\}), \quad (2.6)$$

для которых (см. [2, (4.10)]) $\mathfrak{C}^*_0[E;\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathfrak{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]]$ (семейства (2.6) находятся в двойственности). Легко видеть, что $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а потому данное семейство порождает топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

для которой $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ является [2, предложение 4.1] замкнутой предбазой. Более того (см. [2, раздел 5]), $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а ТП

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle) \quad (2.7)$$

есть суперкомпактное T_1-пространство (см. [2,(5.6)]), для которого

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}. \quad (2.8)$$

Таким образом, имеем в виде

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \quad (2.9)$$

подпространство ТП (2.7). Как следствие (используем также построения на основе [11, (6.18)]) получаем следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *В виде (2.9) реализуется компактное* T_1*-пространство.*

Заметим, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а потому определена топология

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

превращающая [2, предложение 6.4] $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{2.10}$$

При этом согласно [2, предложение 6.5] в виде (2.1) имеем подпространство ТП (2.10):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{2.11}$$

Кроме того, отметим (см. [2, предложение 7.1]), что топологии $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle$ и $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ сравнимы, причем

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle. \tag{2.12}$$

Итак (см. (2.9),(2.10)), получаем следующее БТП с элементами в виде МСС:

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{2.13}$$

При этом (см. (2.8),(2.11),(2.12)) $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$; в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.14}$$

имеем БТП с элементами в виде у/ф π-системы $\mathcal{L}$. В силу (2.8) и (2.11) логично рассматривать БТП (2.14) как подпространство БТП (2.13). В связи с исследованием БТП отметим монографию [13]. Если (X,τ_1,τ_2) – произвольное БТП (X – множество, $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$, $\tau_2 \in (\mathrm{top})[X]$ и при этом $\tau_1 \subset \tau_2$), то называем данное БТП вырожденным, если $\tau_1 = \tau_2$. Напомним, что имеет место следующее (см. [9, §§ 8,9]

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ *или* $\mathcal{L} \in (\mathrm{top})[E]$, *то БТП (2.13) вырождено, то есть* $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, *а каждое из ТП (2.7), (2.10) является нульмерным суперкомпактом.*

Отметим, кроме того, что справедливо

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Если* $\mathcal{L} \in \pi^\natural[E]$, *то БТП (2.14) вырождено:*

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \tag{2.15}$$

при этом каждое из ТП (2.1),(2.9) является нульмерным компактом, то есть нульмерным компактным T_2*-пространством.*

Из (2.8) и предложения 2.1 следует, что в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ компактно в ТП (2.7). Как следствие (см. (2.11)) получаем следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Если* $\mathcal{L} \in \pi^\natural[E]$, *то* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ *замкнуто в ТП (2.10):*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \in \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \in \pi^\natural[E]$. Тогда в силу предложения 2.3 имеем равенство (2.15), означающее согласно предложению 2.1, что (2.1) есть компактное ТП. Стало быть (см. (2.11)), $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть компактное множество в T_2-пространстве (2.10), откуда и вытекает требуемое утверждение. □

В связи с вопросом об условиях невырожденности БТП (2.13) и (2.14) отметим положения [9, раздел 7]: если $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, (E,τ) есть T_1-пространство и при этом $\tau \neq \mathcal{P}(E)$, то при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \neq \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])\&(\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \neq \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle).$$

Итак, в случае T_1-пространства, не являющегося дискретным, при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где τ – топология данного пространства, каждое из БТП (2.13), (2.14) является невырожденным (в [14] приведен целый ряд содержательных примеров такого рода).

Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (итак, $\mathcal{L}$ есть отделимая π-система). Поэтому в силу (1.3) $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall x \in E$. Тогда с учетом [10, предложение 1] при $A \in \mathcal{P}(E)$ устанавливается, что

$$\mathrm{cl}(\{\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]:\ x \in A\}, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) | A \cap U \neq \emptyset\ \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

С этим свойством связано одно следствие, показывающее, что в рассматриваемом случае две вышеупомянутые топологии на множестве у/ф в некотором смысле близки:

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]:\ x \in L\}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]:\ x \in L\}, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])\ \forall L \in \mathcal{L}.$$

Это означает, в частности, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]:\ x \in E\}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]:\ x \in E\}, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$. Грубо говоря, само исходное множество E всюду плотно в каждом из ТП (2.1) и (2.9).

3. Некоторые типы ультрафильтров

В общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ определено следующее множество

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \triangleq \{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]:\ x \in E\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(L))$$

(всех тривиальных фильтров ИП $(E,\mathcal{L})$). Тогда [10, (2.3)]

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) | \bigcap_{L\in\mathcal{U}} L = \emptyset\} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \tag{3.1}$$

есть множество всех свободных у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$. Отметим некоторые примеры возможных вариантов представления $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Пример 3.1. Рассмотрим случай, когда реализуется равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. Пусть $E = \mathbb{N}$ и $\mathcal{L} \triangleq \{\overrightarrow{n,\infty}:\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$; тогда $\mathcal{L} \in (\mathrm{top})[E]$ и, в частности, $\mathcal{L} \in \pi[E]$. При этом $(E,\mathcal{L})$ является T_0-пространством, $\mathcal{U}_0 \triangleq \{\overrightarrow{n,\infty}:\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$ является наибольшим (в упорядоченности по включению) элементом $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Если $t \in E$, то $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[t] = \{\ \overrightarrow{k,\infty}:\ \ k \in \overline{1,t}\} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, так как $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[t] \subset \mathcal{U}_0$ и при этом $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[t] \neq \mathcal{U}_0$. Поскольку выбор t был произвольным, то $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \emptyset$, откуда в силу (3.1) получаем требуемое равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. При этом $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U}_0\}$ по свойствам $\mathcal{U}_0$. □

П р и м е р 3.2. Рассмотрим случай, когда реализуется равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$. Пусть $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где топология $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ такова, что (E, τ) есть компактное T_1-пространство. Тогда $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в силу (1.3). Поскольку при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеем, что $\mathcal{U}$ – центрированное семейство замкнутых множеств, получаем в силу компактности (E, τ), что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$. Итак, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$, а тогда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$. Данное равенство понятно в свете простейших свойств расширения Волмэна. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Пусть топология $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ такова, что (E, τ) есть компактное ТП, а $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$ (как и в примере 3.2). Тогда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Итак, среди тривиальных фильтров есть максимальные. Как следствие реализуется свойство

$$(\forall x_1 \in E\ \exists x_2 \in E:\ ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_1] \subset (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_2])\&((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_2] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \qquad (3.2)$$

З а м е ч а н и е 3.2. Пусть τ удовлетворяет условию предыдущего замечания, а π-система $\mathcal{L} \in \pi[E]$ такова, что $\mathcal{L} \subset \mathbf{C}_E[\tau]$. Тогда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$ и выполняется (3.2).

П р и м е р 3.3. Отметим один вариант ситуации, упомянутой в замечании 3.2. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Полагаем, что $E = [a, b]$ и $\mathcal{L} \overset{\triangle}{=} \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)] : z \in [a, b] \times [a, b]\}$ (мы допускаем при определении $[c, d]$, где $c \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R}$, любые соотношения между c и d, полагая $[c, d] \overset{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} | (c \leq \xi)\&(\xi \leq d)\}$ и допуская возможность совпадения $[c, d]$ и $\emptyset$). Тогда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$ (учитываем очевидное свойство $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$).

В [7, раздел 5] указан пример π-системы (точнее, решетки) замкнутых множеств в T_0-пространстве, в котором имеются и максимальные тривиальные фильтры, то есть тривиальные у/ф, и тривиальные фильтры, не являющиеся максимальными.

4. Некоторые свойства максимальных сцепленных систем

Фиксируем π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$, оговаривая по мере надобности те или иные дополнительные условия. Рассмотрим некоторые положения, касающиеся свойств МСС π-системы $\mathcal{L}$.

Легко видеть, что при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ непременно $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0[E|L] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Напомним здесь же, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ есть множество, компактное в ТП (2.7). С учетом [11, (2.12)] проверяется

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, *то*

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \emptyset. \qquad (4.1)$$

Итак, МСС, не являющиеся у/ф, в некотором отношении подобны свободным у/ф. Вполне очевидны следующие два предложения.

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Справедливо равенство* $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$, *то справедливо (4.1).*

Совсем кратко рассмотрим вопрос о существовании МСС, не являющихся у/ф; будем при этом использовать конструкцию примера 4.18 в [6, гл. VII]. В частности, в дальнейших построениях, связанных с π-системами, будем всякий раз оговаривать естественное в свете упомянутого примера условие, связанное с тем, что множество E содержит не менее трех элементов.

П р е д л о ж е н и е 4.4. *Если* $\exists x \in E \; \exists y \in E \; \exists z \in E:$

$$(x \neq y)\&(y \neq z)\&(x \neq z)\&(\{x;y\} \in \mathcal{L})\&(\{y;z\} \in \mathcal{L})\&(\{x;z\} \in \mathcal{L}), \tag{4.2}$$

то справедливо следующее свойство непустоты:

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем x, y и z со свойством (4.2). Введем трехэлементное сцепленное семейство

$$\mathcal{T} \overset{\triangle}{=} \{\{x;y\};\{y;z\};\{x;z\}\}, \tag{4.4}$$

для которого в силу (4.2) имеем включение $\mathcal{T} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$, а тогда для некоторой МСС $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$ выполняется вложение $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$.

Покажем, что $\mathcal{M} \notin \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathcal{M} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Тогда, в частности,

$$A \cap B \in \mathcal{M} \;\; \forall A \in \mathcal{M} \; \forall B \in \mathcal{M}. \tag{4.5}$$

Поэтому согласно (4.4) и (4.5) $\{y\} = \{x;y\} \cap \{y;z\} \in \mathcal{M}$ и по сцепленности $\mathcal{M}$ имеем из (4.4), что $\{x;z\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, что невозможно. Противоречие доказывает, что на самом деле $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. □

В дальнейшем условие того, что множество E имеет мощность не менее трех, будем записывать в форме, подобной (4.2), с тем, чтобы подчеркнуть связь доказываемых ниже утверждений с последним предложением.

Следствие 4.1. *Если*

$$\exists x \in E \; \exists y \in E \; \exists z \in E: \; (x \neq y)\&(y \neq z)\&(x \neq z), \tag{4.6}$$

то для $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, *где* $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ *и при этом* (E, τ) *есть* T_1*-пространство, справедливо (4.3).*

Пусть $(\mathrm{alg})'_0[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E] | \{x\} \in \mathcal{L} \; \forall x \in E\}$ (тем самым введены алгебры п/м E, содержащие каждая синглетоны всех точек из E).

Следствие 4.2. *Если выполнено условие* (4.6) *и* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})'_0[E]$, *то справедливо свойство (4.3).*

Разумеется, согласно предложению 4.2 имеем при условии (4.6) следующее положение: если $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ превращает E в T_1-пространство (E, τ), то

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset. \tag{4.7}$$

Аналогичным образом, при условии (4.6) для $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})_0'[E]$ (4.7) также выполняется.

Напомним предложение 2.4. С учетом этого предложения и следствия 4.2 получаем

П р е д л о ж е н и е 4.5. *Если выполнено* (4.6) *и* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})_0'[E]$, *то*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle \setminus \{\emptyset\}.$$

Итак, если исходная π-система является алгеброй множеств с синглетонами, то МСС, не являющиеся у/ф, составляют в своей совокупности непустое открытое множество в ТП (2.10), то есть в «стоуновской» топологии. По аналогии с предложением 4.4 (учитывается также предложение 4.16 в [6, гл. VII]) устанавливается

П р е д л о ж е н и е 4.6. *Если выполнено условие* (4.6) *и* $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, *где* $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ *и при этом* (E, τ) *есть нормальное* $[12, 1.5]$ *пространство, то*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L} \rangle \setminus \{\emptyset\}.$$

Следствие 4.3. *Если выполнены все условия предложения 4.6, то*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle \setminus \{\emptyset\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.

2. *Ченцов А.Г.* Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257-272.

3. *de Groot J.* Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89-90.

4. *van Mill J.* Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam. Math. Center Tract. Amsterdam, 1977. Vol. 85. 238 p.

5. *Strok M., Szymanski A.* Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. № 1. P. 81-91.

6. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.

7. *Ченцов А.Г.* Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 49. С. 55-79.

8. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

9. *Ченцов А.Г.* Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365-388.

10. *Ченцов А.Г.* Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87-101.

11. *Ченцов А.Г.* Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113-142. DOI: 10.20537/vm110112.

12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.

13. *Dvalishvili B.P.* Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures and applications // Mathematics Studies. Nort-Holland, 2005. 422 p.

14. *Chentsov A.G.* Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. № 2. P. 100-121.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела управляемых систем; Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 846–860. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860

MAXIMAL LINKED SYSTEMS AND ULTRAFILTERS OF WIDELY UNDERSTOOD MEASURABLE SPACES

A. G. Chentsov

N.N.Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academii of Science
16 Kovalevskaja St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
The Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Abstract. Two types of set families (ultrafilters or maximal filters and maximal linked systems) for widely understood measurable space are considered. The resulting sets of ultrafilters and maximal linked systems are equipped with the pair of comparable topologies (within the meaning of «Wallman» and «Stone»). As a result, two bitopological spaces are realized; one of them turns out a subspace of another. More precisely, ultrafilters are maximal linked systems and the totality of the latter forms a cumulative bitopological space. With employment of topological constructions some characteristic properties of ultrafilters and (in smaller power) maximal linked systems are obtained (the question is necessary and sufficient conditions of maximality of filters and linked systems).

Keywords: bitopological space; topology; ultrafilters

REFERENCES

1. Bulinskiy A.V., Shiryayev A.N. *Teoriya sluchaynykh protsessov* [The Theory of Random Processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. (In Russian).

2. Chentsov A.G. Bitopologicheskiye prostranstva ul'trafil'trov i maksimal'nykh stseplennykh sistem [Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257-272. (In Russian).

3. de Groot J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications.* Berlin, VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89-90.

4. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. *Amsterdam. Math. Center Tract.*, Amsterdam, 1977, vol. 85, 238 p.

5. Strok M., Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81-91.

6. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnyye konstruktsii* [General Topology. Main Constructions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00410).

7. Chentsov A.G. Superrasshireniye kak bitopologicheskoye prostranstvo [Superextension as bitopological space]. *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU – Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at UdSU*, 2017, vol. 49, pp. 55-79. (In Russian).

8. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv* [The Theory of Sets]. Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.

9. Chentsov A.G. Ul'trafil'try i maksimal'nyye stseplennyye sistemy mnozhestv [Ultrafilters and maximal linked systems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365-388. (In Russian).

10. Chentsov A.G. Nekotoryye svoystva ul'trafil'trov, svyazannyye s konstruktsiyami rasshireniy [Some ultrafilter properties connected with extension constructions]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2014, no. 1, pp. 87-101. (In Russian).

11. Chentsov A.G. Fil'try i ul'trafil'try v konstruktsiyakh mnozhestv prityazheniya [Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2011, no. 1, pp. 113-142. (In Russian). DOI: 10.20537/vm110112.

12. Engel'king R. *Obshchaya topologiya* [General Topology]. Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p. (In Russian).

13. Dvalishvili B.P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures and applications. *Mathematics Studies.* Nort-Holland, 2005, 422 p.

14. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems. *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100-121.

Received 16 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher; Institute of Radioelectronics and Information Technologies of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

For citation: Chentsov A.G. Maksimal'nye stseplennye sistemy i ul'trafil'try shiroko ponimaemyh izmerimyh prostranstv [Maximal linked systems and ultrafilters of widely understood measurable spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 846–860. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860 (In Russian, Abstr. in Engl.).